

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM 2015

Môn thi: TOÁN (Vòng 1 – Dành cho tất cả thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (3,5 điểm)

- Giả sử a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2 + 3a = b^2 + 3b = 2$.
 - Chứng minh rằng $a + b = -3$.
 - Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = -45$.
- Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ 4x^2 + y^2 = 5xy^2 \end{cases}$$

Bài 2. (3,0 điểm)

- Tìm các số nguyên x, y không nhỏ hơn 2 sao cho $xy - 1$ chia hết cho $(x - 1)(y - 1)$.
- Với x, y là những số thực thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2 + 2y + 1 = 0$, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{xy}{3y + 1}$.

Bài 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC không cân có tâm đường tròn nội tiếp là điểm I . Đường thẳng AI cắt BC tại D . Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua IC, IB .

- Chứng minh rằng EF song song với BC .
- Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DE, DF, EF . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN tại P khác A . Chứng minh rằng bốn điểm M, P, N, J cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh rằng ba điểm A, J, P thẳng hàng.

Bài 4. (1,0 điểm)

- Cho bảng ô vuông 2015×2015 . Kí hiệu ô $(i; j)$ là ô ở hàng thứ i , cột thứ j . Ta viết các số nguyên dương từ 1 đến 2015 vào các ô của bảng theo quy tắc sau:
 - Số 1 được viết vào ô $(1; 1)$,
 - Nếu số k được viết vào ô $(i; j)$, ($i > 1$), thì số $k + 1$ được viết vào ô $(i - 1; j + 1)$.
 - Nếu số k được viết vào ô $(1; j)$ thì số $k + 1$ được viết vào ô $(j + 1; 1)$. (Xem hình 1).

Khi đó, số 2015 được viết vào ô $(m; n)$. Hãy xác định m và n .

- Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + abc \leq 4$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab + bc + ca)$.